

WYBRANE ZADANIA EGZAMINACYJNE
AGH 2024

Zadanie 1 [1p.] Suma

$$\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ$$

wynosi

- A. 45 B. $45\frac{1}{2}$ C. 90 D. $90\frac{1}{2}$

Zadanie 2 [1p.] Niech $f(x) = |\log(x+3) - 2|$. Równanie $f(x) = 1$

- A. ma dokładnie jedno rozwiązanie. B. ma dokładnie dwa rozwiązania.
C. ma nieskończenie wiele rozwiązań. D. nie ma rozwiązań.

Zadanie 3 [1p.] Jeżeli $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ i $P(A \cup B) = 2 \cdot P(A \cap B)$, to $P(A \cup B)$ wynosi

- A. $\frac{11}{18}$ B. $\frac{11}{12}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

Zadanie 4 [1p.] Granica

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{p^2 x^2 + 1}}$$

jest równa -1

- A. dla $p = \pm 1$ B. tylko dla $p = 1$. C. tylko dla $p = -1$. D. dla $p \neq 0$.

Zadanie 5 [2p.] Oblicz odległość punktu $A = (-5, 3)$ od prostej $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Podaj przybliżenie otrzymanego wyniku z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku. Zakoduj cyfrę jedności i dwie początkowe cyfry po przecinku.

Odpowiedź:

--	--	--

Zadanie 6 [3p.] Prostokąt o bokach x, y jest podobny do prostokąta o bokach $x+k, y+k$, gdzie $k \in \mathbb{R}_+$. Wykaż, że te prostokąty są kwadratami.

Zadanie 7 [3p.] Ze zbioru $\{2^n : n \in \{0, \dots, 9\}\}$ losujemy bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że pierwiastek z ich iloczynu jest liczbą wymierną.

Zadanie 8 [3p.] Rozwiąż nierówność

$$2|\sin x| \operatorname{ctg} x - \sin 2x \geq 0$$

dla $x \in [0, 2\pi]$.

Zadanie 9 [4p.] Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ czwartego stopnia, który jest podzielny przez dwumian $x - \frac{1}{2}$. Wiedząc, że dla argumentu 3 wielomian $W(x)$ przyjmuje wartość 15 wyznacz jego wzór, a następnie rozwiąż równanie $W(x+4) = 0$.

Zadanie 10 [4p.] Wiedząc, że lewa strona nierówności jest zbieżnym szeregiem geometrycznym, rozwiąż nierówność

$$\frac{1}{x+2} + \frac{2x+1}{(x+2)^2} + \frac{(2x+1)^2}{(x+2)^3} + \dots \geq 3.$$

Zadanie 11 [4p.] Rozwiąż nierówność

$$\frac{\log_2^2 x - 9}{2 \log_2 x + 1} \geq 0.$$

Zadanie 12 [5p.] Dany jest ostrosłup trójkątny, którego krawędzie boczne i jedna z krawędzi podstawy mają długość a . Wykaż, że jeżeli w podstawie ostrosłupa miary kątów wewnętrznych tworzą niemalejący ciąg arytmetyczny, natomiast długości boków tego trójkąta tworzą ciąg geometryczny, to ostrosłup jest czworościanem foremnym.

Zadanie 13 [5p.] Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = (2m+5)x^2 + (2m-3)x + 1$. Wyznacz, w zależności od parametru m , wzór funkcji

$$g(m) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2},$$

gdzie x_1, x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji f . Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g .

Zadanie 14 [6p.] Dany jest okrąg $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$. Znajdź pole trójkąta CDS , gdzie C, D są punktami przecięcia stycznych do okręgu prostopadłych do prostej $x - 2y = 0$ z tą prostą, a S jest środkiem okręgu.

Zadanie 15 [7p.] Niech

$$f(x) = \frac{8-k}{3} - 4x^2 + (k+2)x + 2 - 24,$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$. Dla jakich wartości parametru $k \in \mathbb{R}$

- a) funkcja f jest rosnąca w zbiorze $\mathbb{R}$,
- b) funkcja ma tylko jedno ekstremum lokalne (określ jego rodzaj, jeżeli istnieje)?